SUL

MOTO DEL PENDOLO

MEMORIA

DEL

PROFESSORE LORENZO RESPIGHI

(Estratta dal Volume 5.° delle Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna).

BOLOGNA
TIPOGRAFIA A SAN TOMMASO D' AQUINO
1854

Non appena fu divulgata la notizia del celebre esperimento trovato dall' esimio fisico S.r Leon Foucault per dimostrare nel modo il più incontestabile il moto rotatorio della terra, molti Geometri distinti persuasi della importanza di questo fatto ne fecero soggetto di gravissimi studi, coi quali si fecero a dimostrare la teoria con quello concorde, deducendolo come necessaria conseguenza della teoria del moto applicata a questo speciale problema. Le vie seguite nella risoluzione di questa questione sono due. La prima di esse può considerarsi come dinamico-analitica, in quanto che, appoggiandosi interamente sulle equazioni generali dei moti relativi, per essa si è dedotta, come legittima conseguenza, la singolare proprietà del moto del pendolo sospeso a lungo e flessibile filo, per la quale il piano di oscillazione, ossia il piano condotto per la verticale e per il centro di oscillazione del pendolo, anzichè rimanere ad una costante orientazione, doveva presentare un moto rotatorio apparente attorno alla verticale in senso opposto al moto rotatorio della terra con velocità prossimamente costante ed $= h \operatorname{sen} a$, chiamando h la velocità angolare della terra ed a la latitudine geografica del luogo di osservazione.

Questo risultato però non è che approssimativo per le supposizioni che si fanno nella risoluzione del problema. L' altra via seguita dai geometri nello sciogliere questa questione può dirsi meccanico-geometrica in quanto che, prescindendo dal moto assoluto del pendolo, per essa non si considera che il moto relativo del piano di oscillazione, e per via di considerazioni puramente geometriche si perviene alla spiegazione del fenomeno in discorso. Il principio, che conduce a questo modo di risolvere la questione, è il seguente. Qualora il piano del pendolo fosse fisso alla terra partecipando al moto di rotazione di questa, potrebbe il suo moto rotatorio decomporsi in due, uno attorno alla verticale con velocità $h \operatorname{sen} a$, l' altro attorno alla meridiana con velocità angolare $h \cos a$; ma siccome il piano del pendolo non è connesso alla terra, se non per la circostanza di dover passare per la verticale del punto di sospensione, onde viene con questa tratto in giro attorno all' asse della terra, mentre per la flessibilità del filo, cui è sospeso il pendolo, non ha nessuna connessione speciale colla verticale per partecipare al moto rotatorio, cui la medesima per essere connessa invariabilmente alla terra continuamente obbedisce, così il piano d' oscillazione del pendolo partecipando al moto rotatorio, che tutti i corpi sulla terra hanno attorno alla meridiana, rimarrà affatto indipendente per la sua inerzia e pel modo, con cui è vincolato alla terra, dal moto rotatorio attorno alla verticale.

Conseguentemente riferito il piano di oscillazione ad un piano verticale fisso sulla terra, siccome questo, oltre al moto rotatorio attorno alla meridiana, ha pure l' altro moto attorno alla verticale, a cui il primo non partecipa, così ne avverrà un moto relativo, per cui il piano fisso sulla terra si sposterà da quello di oscillazione girando attorno alla verticale con velocità angolare $h \operatorname{sen} a$. Se non che il piano fisso sulla terra mantenendosi coll' osservatore nello stato di quiete relativa, e giudicandosi questi per mancanza di organo, che lo avverta dello stato di movimento, in che si trova, e per un falso criterio dall' abitudine procuratogli, nello stato di quiete assoluta, in tale stato giudica pure il piano, cui riferisce quello di oscillazione, onde il moto reale di quello per lui si trasforma in un moto apparente in senso opposto osservato nel piano di oscillazione. Così viene per la seconda via spiegato il singolare fenomeno dell' esperimento di Foucault. I risultati, ai quali sono condotti i geometri per queste due vie, quantunque siano sufficienti a dare una spiegazione approssimata del fenomeno considerato nel suo complesso, non soddisfano, a quanto mi sembra, per la spiegazione di quelle particolarità che nel medesimo si osservano, e che sensibilmente ne modificano la legge fondamentale. Di queste le principali sono le due seguenti, meritevoli di speciale considerazione. La prima si è che il moto del pendolo non è piano, ma sensibilmente conico. La seconda che la velocità del moto angolare apparente del piano di oscillazione non si mantiene rigorosamente costante, risultando da vari esperimenti che in vicinanza al primo verticale essa è alquanto più grande, che in vicinanza al Meridiano.

Queste due proprietà del moto del pendolo confermate da non poche esperienze complicano la questione, e la rendono tale da non potersi più riguardare esclusivamente dal lato geometrico, poichè la decomposizione del moto rotatorio non può conciliarsi colla variabilità del movimento del piano di oscillazione e col moto conico del pendolo.

Il problema adunque deve trattarsi analiticamente per mezzo delle equazioni generali della Meccanica applicandole convenientemente al moto del pendolo, tenendo conto del moto di rotazione della terra, alla quale trovasi appeso.

Esaminando però le risoluzioni analitiche di questo problema, che ho potuto procurarmi, ho osservato che nel determinare le forze acceleratrici del pendolo si è fatta astrazione dalla variabilità della forza centrifuga sviluppata pel moto rotatorio della terra, variabilità dovuta all' aumento, od alla diminuzione della velocità, colla quale il pendolo gira attorno alla terra, per il suo moto oscillatorio; e parmi che tenendo conto di questo elemento debbasi introdurre nelle equazioni del moto un nuovo termine, da cui dipenderebbe in gran parte la spiegazione delle suaccennate proprietà del moto del pendolo.

Prima di venire alla risoluzione del problema in questione mi propongo di ricavare col metodo seguente, che sembrami preferibile per la sua semplicità agli altri fino ad ora adottati, le equazioni generali, da cui dipende la risoluzione del problema medesimo col seguente

PROBLEMA

Trovare le equazioni del moto apparente di un punto libero riferito a tre assi ortogonali, rotanti con moto uniforme attorno ad un asse invariabile, per un osservatore che partecipa al movimento degli assi.

SOLUZIONE

Gli assi e l' osservatore si possono ritenere nello stato di quiete, purchè si comunichi tanto ad essi che al punto, di cui vuolsi determinare il moto, il movimento angolare degli assi, ma in senso contrario; cosicchè alle forze P, Q, R che sollecitano il mobile lungo i tre assi, vengano combinate quelle forze, che possono produrre nel medesimo il moto suddetto. Queste forze possono ridursi a due forze continue, una diretta secondo la normale all' asse di rotazione abbassata dal punto mobile, rappresentabile da $h^2 r$, chiamando h la velocità angolare del sistema ed r la distanza del punto dall' asse, l' altra giacente nel piano normale all' asse ed applicata al punto ad angolo retto colla normale abbassata sull'asse di rotazione, rappresentabile da $\left(\frac{d(-hr)}{dt}\right)$. Siccome poi l' osservatore, giudicandosi nello stato di quiete, attribuisce il proprio moto angolare e quello degli assi al punto, così questo sarà apparentemente animato dalla velocità angolare del sistema, di maniera che, volendo determinare il moto apparente del punto, bisognerà ancora

intendere al medesimo applicata un' altra volta la forza acceleratrice $\left(\frac{d(-hr)}{dt}\right)$ atta a produrre in esso quella velocità apparente.

Di quì si deduce che alle forze che agiscono direttamente sopra il punto mobile si dovranno unire le altre $h^2 r$, $2\left(\frac{d(-hr)}{dt}\right)$ nel modo su indicato. Ciò posto suppongasi l' asse di rotazione sul piano $z\, y$ e passante per l' origine formando coll' asse delle y l' angolo α. Si decompongano le due forze $+h^2 r$, $2\left(\frac{d(-hr)}{dt}\right)$ in tre parallele ai tre assi; le componenti della prima saranno

$$(1)\quad +h^2x,\ +h^2\operatorname{sen}\alpha(y\operatorname{sen}\alpha - z\cos\alpha),\ +h^2\cos\alpha(y\operatorname{sen}\alpha - z\cos\alpha);$$

le componenti della seconda si troveranno decomponendo la velocità $2hr$ in tre parallele ai tre assi delle x, y, z e differenziandole, e verranno espresse da

$$(2)\quad +2h\left[\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{dy}{dt}\right) - \cos\alpha\left(\frac{dz}{dt}\right)\right],\ -2h\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right),\ 2h\cos\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Si trasformino ora le coordinate x, y, z nelle altre x', y', z' trasportando gli assi paralleli a se stessi e l' origine sul piano $y\,z$ alle coordinate

$$z = R\cos\alpha,\ y = R\operatorname{sen}\alpha,$$

chiamando R la distanza della nuova origine alla primitiva, e si avranno le relazioni

$$x' = x,\ y' = y - R\operatorname{sen}\alpha,\ -z' = z - R\cos\alpha$$

contando le z' in senso opposto alle z, vale a dire dall' origine verso l' asse di rotazione. Con questa trasformazione le forze acceleratrici (1), (2) verranno espresse dalle corrispondenti

$$h^2x',\ h^2\operatorname{sen}\alpha(y'\operatorname{sen}\alpha + z'\cos\alpha),\ h^2\cos\alpha(y'\operatorname{sen}\alpha + z'\cos\alpha),$$

$$2h\left[\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{dy'}{dt}\right) + \cos\alpha\left(\frac{dz'}{dt}\right)\right],\ -2h\left(\frac{dx'}{dt}\right)\operatorname{sen}\alpha,\ -2h\left(\frac{dx'}{dt}\right)\cos\alpha.$$

Componendo quelle, che agiscono secondo ciascun asse, e trascurando gli apici di x', y', z' si avranno le forze

$$+h^2 x + 2h\left[\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{dy}{dt}\right) + \cos\alpha\left(\frac{dz}{dt}\right)\right]$$

$$+h^2 \operatorname{sen}\alpha(y\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha) - 2h\left(\frac{dx}{dt}\right)\operatorname{sen}\alpha$$

$$+h^2 \cos\alpha(y\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha) - 2h\left(\frac{dx}{dt}\right)\cos\alpha$$

le quali forze combinate colle P, Q, R, ci daranno le

$$P + 2h\left[\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{dy}{dt}\right) + \cos\alpha\left(\frac{dz}{dt}\right)\right] + h^2 x$$

$$Q - 2h\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right) + h^2(y\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

$$R - 2h\cos\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right) + h^2(y\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha)\cos\alpha,$$

che si dovranno considerare come le forze sollecitanti il punto libero, alle quali è dovuto il suo moto apparente.

Sostituendo finalmente questi valori delle forze acceleratrici nelle equazioni generali del moto di un punto libero, queste si ridurranno alle equazioni

$$(a)\left\{\begin{aligned} & P + 2h\left[\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{dy}{dt}\right) + \cos\alpha\left(\frac{dz}{dt}\right)\right] + h^2 x = \frac{d^2x}{dt^2} \\ & Q - 2h\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right) + h^2(y\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha = \frac{d^2y}{dt^2} \\ & R - 2h\cos\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right) + h^2(y\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha)\cos\alpha = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

Qualora poi si avesse la velocità angolare h piccolissima, i termini contenenti il fattore h^2 si potrebbero trascurare

in paragone degli altri, e le equazioni (a) si ridurrebbero alle

$$(b)\left\{\begin{aligned} & P + 2h\left[\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{dy}{dt}\right) + \cos\alpha\left(\frac{dz}{dt}\right)\right] = \frac{d^2x}{dt^2} \\ & Q - 2h\left(\frac{dx}{dt}\right)\operatorname{sen}\alpha = \frac{d^2y}{dt^2} \\ & R - 2h\left(\frac{dx}{dt}\right)\cos\alpha = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

Queste saranno le equazioni richieste nel problema.

Applichiamo ora le equazioni (b) al moto del pendolo.

PROBLEMA

Determinare il moto apparente del pendolo semplice sospeso ad un punto fisso della terra di cognita latitudine geografica α, avendo riguardo al moto rotatorio della terra, per un osservatore che, partecipando a questo moto rotatorio, riferisce il pendolo a tre assi ortogonali fissi sulla terra stessa.

SOLUZIONE

Si stabilisca l' origine delle coordinate nel punto di sospensione e prendasi per asse delle z la corrispondente verticale, computando le z positive dall' alto al basso; per asse delle y la corrispondente linea meridiana, contando le y positive verso il Nord; e finalmente per asse delle x la linea Est-Ovest, considerando come positive le x dal punto di sospensione verso il punto Est.

Ciò posto si rileva che, potendosi il pendolo ritenere come un punto materiale libero, purchè alle forze acceleratrici, che sopra di lui agiscono, si combini la tensione del filo, il presente problema di moto apparente riducesi precisamente ad un caso particolare di quello antecedentemente risoluto; dovrassi quindi nella sua risoluzione far uso delle equazioni (b), facendo α eguale alla latitudine geografica del luogo (e non già alla latitudine geocentrica come alcuni hanno ammesso), eguagliando h alla velocità angolare della terra e sostituendo in luogo di P, Q, R le forze acceleratrici del pendolo.

Le forze che continuamente agiscono sul pendolo si riducono alle seguenti.

1.ª La forza di gravità che attira continuamente il grave sospeso verso il centro della terra.

2.ª La tensione del filo, onde è sospeso il grave.

3.ª La forza centrifuga sviluppata nel moto rotatorio del pendolo attorno all' asse della terra.

4.ª La resistenza dell' aria.

Facendo per altro astrazione dalle altre forze resistenti che si possono intendere applicate al pendolo.

In quanto alla forza di gravità potremo ritenerla come una forza acceleratrice costante nella intensità e nella direzione, perchè supporremo le oscillazioni del pendolo piccolissime, e la rappresenteremo con g'.

In quanto alla tensione del filo si potrà ritenere come una forza acceleratrice, che attira il pendolo verso l' origine delle coordinate, onde rappresentata con N e decomponendola in tre parallele ai tre assi, le componenti saranno espresse da $\frac{-Nx}{l}$, $\frac{-Ny}{l}$, $\frac{-Nz}{l}$ chiamando l la lunghezza del pendolo semplice sincrono al pendolo composto impiegato nelle esperienze.

Riguardo alla forza centrifuga si osservi che le distanze, alle quali si porta il pendolo nelle sue oscillazioni, essendo trascurabili in paragone del raggio del parallelo della terra per le nostre latitudini, nelle quali supponiamo fatte le esperienze, potremo supporla costante nella sua direzione; ma riguardo alla sua intensità è da notare che, dovendosi essa rappresentare dalla formola $\frac{u^2}{r}$, non potrà supporsi costante, a meno che non si mantenga tale il rapporto $\frac{u^2}{r}$, ciò che

non può aver luogo. Poichè nel moto oscillatorio il pendolo non si scosta dal parallelo di raggio r che di quantità trascurabili in paragone di r, e quindi può ritenersi lo stesso r come costante per tutte le posizioni del pendolo, mentre la velocità u costante, che il pendolo avrebbe se si mantenesse sulla terra nello stato di quiete relativa, viene sensibilmente aumentata, o diminnita dalla velocità relativa del pendolo nel suo moto oscillatorio; onde il valore di u risulterà dalla velocità hr dovuta al moto della terra combinata con quella velocità, che il pendolo oscillante acquista nella direzione del moto rotatorio della terra, ossia colla sua velocità relativa secondo l'asse delle x, cioè secondo la linea Est-Ovest; velocità, che potremo indicare con $\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Dimodo che il vero valore della forza centrifuga si ridurrà ad $\frac{\left[hr+\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]^2}{r}$, ossia

$$\frac{h^2r^2+2hr\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{r}=h^2r+2h\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

trascurando l' ultimo termine, perchè piccolissimo relativamente agli altri due.

Componendo la forza h^2r colla gravità, ne nascerà una risultante, che chiameremo g, la quale, come è noto, solleciterà il grave lungo l' asse delle z dall' alto al basso secondo la verticale. L' altra parte della forza centrifuga $2h\left(\frac{dx}{dt}\right)$ potrà ritenersi come una forza acceleratrice variabile, parallela al piano delle zy e formante coll' asse delle z l' angolo α (latitudine geografica del luogo), la qual forza decomposta in due, una secondo la verticale, l' altra secondo la meridiana, cioè una secondo l' asse delle y, l' altra secondo l' asse delle z, le componenti sarannno $-2\,h\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)$ sen α, $-2h\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)\cos\alpha$. L' ultima di queste componenti dovrebbesi combinare colla forza g, ma siccome essa è piccolissima in paragone di questa, potremo trascurarla. Rimarrà adunque la sola componente secondo l' asse delle y. Si conchiuda pertanto che la forza di gravità combinata colla centrifuga danno origine a due forze acceleratrici, una $+g$ costante e parallela all' asse delle z, l' altra variabile $-2\,h\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)$ sen α secondo l' asse delle y.

Finalmente la resistenza dell' aria si potrà ritenere come una forza acceleratrice secondo la tangente alla curva descritta dal pendolo, e supponendola proporzionale al quadrato della velocità del mobile, potremo rappresentarla con $-c\left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)^2$ essendo c una costante. Risolvendola ora in tre parallele ai tre assi, le componenti saranno

$$-c\left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right),\ -c\left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right),\ -c\left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right).$$

Ora da quanto superiormente si è esposto possiamo dedurre

$$P=-\frac{N\,x}{l}-c\left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)$$

$$Q=-\frac{N\,y}{l}-c\left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)-2\,h\left(\frac{dx}{dt}\right)\text{sen}\,\alpha$$

$$R=g-\frac{N\,z}{l}-c\left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni (b), si avranno pel moto del pendolo le tre equazioni

$$(c)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=2h\left[\text{sen}\alpha\left(\dfrac{dy}{dt}\right)+\cos\alpha\left(\dfrac{dz}{dt}\right)\right]-\dfrac{Nx}{l}-c\left(\dfrac{ds}{dt}\right)\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}=-2h\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\text{sen}\alpha-\dfrac{Ny}{l}-c\left(\dfrac{ds}{dt}\right)\left(\dfrac{dy}{dt}\right)-2h\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\text{sen}\,\alpha\\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2}=-2h\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\cos\alpha-\dfrac{Nz}{l}-c\left(\dfrac{ds}{dt}\right)\left(\dfrac{dz}{dt}\right)+g.\end{cases}$$

Confrontando queste equazioni con quelle adoperate fino ad ora nella risoluzione di questo problema, non vi si rileverà altra differenza, che quella del termine $-2\,h\,\text{sen}\,\alpha\frac{dx}{d\,t}$ contenuto nella seconda equazione introdotto per la completa valutazione della forza centrifuga.

La risoluzione del problema in discorso dipende adunque dalla integrazione di queste equazioni differenziali di second' ordine.

Per ottenere un rapporto differenziale di primo ordine tra le variabili del moto si moltiplichi la prima equazione per y, la seconda per x, e si sottragga la prima dalla seconda, onde verrà elimininata la N e si avrà trascurando la resistenza dell' aria

$$\frac{x\,d^2y-y\,d^2x}{dt^2}=-2\,h\,\text{sen}\,\alpha\left(\frac{x\,d\,x+y\,d\,y}{d\,t}\right)-2hx\left(\frac{dx}{dt}\right)\text{sen}\,\alpha$$
$$-2\,h\,y\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\cos\alpha$$

da cui

$$d\left(\frac{xdy-ydx}{d\,t}\right)=-2\,h\,\text{sen}\,\alpha\,(x\,d\,x+y\,d\,y)-2\,h\,\text{sen}\,\alpha\,x\,d\,x$$
$$-2\,h\cos\alpha\int y\,d\,z.$$

Primieramente si osservi che il termine

$$-2\,h\cos\alpha\int y\,d\,z\,,$$

si può trascurare, perchè dovendosi estendere l' integrale a tutta la oscillazione, e i due rami della curva potendosi sensibilmente ritenere come simmetrici attorno all' asse y, ad ogni valore $y\,d\,z$ per la prima semioscillazione ne corrisponderà un eguale, ma di segno contrario per l'altra metà della oscillazione, onde la somma dei diversi valori $y\,d\,z$ potrà ritenersi come nullo, tanto più che dovrebbesi moltiplicare per la piccolissima quantità $2\,h\cos\alpha$, onde si avrà

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{d\,t}=C-h\operatorname{sen}\alpha\,(x^2+y^2)-h\operatorname{sen}\alpha\,x^2.$$

Per determinare la costante C riferiamoci all' origine del moto, nella quale se suppongasi il pendolo abbandonato senza impulso alcuno si avrà

$$\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)=0,\ \left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)=0,\ x=a,\ y=b,$$

essendo a e b le coordinate del punto, in cui si è abbandonato il pendolo; di qui per determinare C si avrà

$$0=C-h\operatorname{sen}\alpha\,(a^2+b^2)-h\operatorname{sen}\alpha\,a^2$$

da cui

$$C=h\operatorname{sen}\alpha\,(\,2\,a^2+b^2\,)\,,$$

sostituendo questo valore nella precedente equazione e dividendola per x^2+y^2 si avrà

$$\frac{1}{dt}\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)=\frac{h\operatorname{sen}\alpha(2a^2+b^2)}{x^2+y^2}-h\operatorname{sen}\alpha-\frac{h\operatorname{sen}\alpha\,x^2}{x^2+y^2}\,.$$

Chiamisi θ l' angolo formato dal piano di oscillazione col piano delle $z\,x$, cioè col primo verticale e si avrà

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{y}{x}\quad\text{da cui}\quad d\,\theta=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

per cui sostituendo si avrà

$$\frac{d\,\theta}{d\,t}=\frac{h\operatorname{sen}\alpha\,(\,2\,a^2+b^2\,)}{x^2+y^2}-h\operatorname{sen}\alpha-\frac{h\operatorname{sen}\alpha\,x^2}{x^2+y^2}\,.$$

Sia ω l' angolo formato dal filo del pendolo coll' asse delle z e si avrà

$$x^2+y^2=l^2\operatorname{sen}\omega\quad\text{e}\quad x=l\operatorname{sen}\omega\cos\theta$$

onde l' ultima equazione potrà ridursi alla

$$(d)\quad\left(\frac{d\,\theta}{d\,t}\right)=\frac{h\operatorname{sen}\alpha\,(\,2\,a^2+b^2\,)}{l^2\operatorname{sen}^2\omega}\,h-\operatorname{sen}\alpha-h\cos\alpha\cos^2\theta.$$

Siccome le oscillazioni del pendolo sono piccolissime potremo sostituire per ω il suo valore ricavato nelle oscillazioni piane del pendolo, da cui si ha

$$\omega=k\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right);$$

di più essendo ω piccolissimo potremo supporre $\operatorname{sen}\omega=\omega$ per cui

$$d\,\theta=\frac{h\operatorname{sen}\alpha\,(2\,a^2+b^2)\,d\,t}{l^2\,k^2\cos^2\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)}-h\operatorname{sen}\alpha\,d\,t-h\operatorname{sen}\alpha\cos\theta\,d\,t$$

ed integrando

$$(e)\quad\theta=A+\frac{h\operatorname{sen}\alpha\,(2\,a^2+b^2)}{l^2\,k^2}\sqrt{\frac{l}{g}}\operatorname{tang}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$
$$-h\,t\operatorname{sen}\alpha-h\operatorname{sen}\alpha\int\cos^2\theta\,d\,t.$$

Nella quale se t è piccolo potremo supporre durante ciascuna oscillazione $\cos^2\theta$ come costante e si avrà

$$\theta=A+\frac{h\operatorname{sen}\alpha\,(\,2\,a^2+b^2\,)}{l^2\,k^2}\sqrt{\frac{l}{g}}\operatorname{tang}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$
$$-h\,t\operatorname{sen}\alpha-h\,t\operatorname{sen}\alpha\cos^2\theta.$$

Per determinare la costante A introdotta per la integrazione, si faccia $t = 0$ per cui si avrà $\theta = A$, quindi la costante A rappresenterà l'angolo formato dal piano d'oscillazione col primo verticale al principio della oscillazione.

Alla fine della oscillazione dovendosi fare $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ si avrà $\operatorname{tang.} t \sqrt{\frac{g}{l}} = \operatorname{tang.} \pi = 0$, e perciò

$$(f) \quad \theta = A - h\,t \operatorname{sen} \alpha - h\,t \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \theta,$$

od anche

$$(g) \quad \theta = A - h\,t \operatorname{sen} \alpha - h\,t \operatorname{sen} \alpha \cos^2 A.$$

Questa equazione ci fa conoscere lo spostamento del piano del pendolo avvenuto alla fine di ciascuna oscillazione.

Esaminando la prima equazione (e) si rileva che il moto angolare del piano di oscillazione non è uniforme, ma vario durante la oscillazione. Alla fine di questa riducesi la sua velocità a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h \operatorname{sen} \alpha \,(2a^2 + b^2 - a'^2)}{(a^2 + b^2)} - h \operatorname{sen} \alpha$$

ossia

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h \operatorname{sen} \alpha \,(a^2 - a'^2)}{(a^2 + b^2)},$$

supponendo che il pendolo salga alla medesima altezza, da cui fu abbandonato, e chiamando a' la x del pendolo alla fine della oscillazione. Di qui si rileva che il moto nella seconda oscillazione verrà necessariamente conico, e siccome l'impulso è positivo e quindi nel senso del moto della terra, così anchè il moto conico sarà nel senso del moto rotatorio della terra. Nelle oscillazioni successive il moto conico si renderà sempre più visibile, perchè alla fine di ciascuna oscillazione la velocità del pendolo nel senso del moto della terra si va aumentando.

Riguardo all'apside della curva descritta in ciascuna oscillazione dal pendolo attorno alla verticale possiamo dedurre, che esso è dotato di un moto angolare in senso opposto a quello della terra, e che la sua velocità, o lo spostamento subito in ciascuna oscillazione, ossia l'angolo descritto in ciascuna oscillazione [come si rileva dalle equazioni (e), (f), (g)] è variabile, massimo in vicinanza al primo verticale dove si accosta al valore $-2\,h\,t \operatorname{sen} \alpha$, minimo al meridiano dove riducesi a $-h \operatorname{sen} \alpha$.

Di qui deducesi che l'apside sarà dotato di un moto angolare vario attorno la verticale in senso opposto a quello del Meridiano con velocità costantemente minore di $-2\,h \operatorname{sen} \alpha$ e maggiore di $-h \operatorname{sen} \alpha$. Devesi però avvertire che questi risultati sono soltanto approssimativi, e dedotti astrazione fatta dalle resistenze, e da tanti altri elementi, che forse modificano sensibilmente il fenomeno. Onde non possiamo sperare di vederli scrupolosamente corrispondere alle esperienze, poichè il moto del pendolo, oltre alla modificazione da esso subita per la non perfetta flessibilità del filo, risentirà l'effetto delle altre resistenze nel calcolo trascurate, per le quali restringendosi ad ogni oscillazione l'escursione del pendolo, il moto conico opponendosi al moto angolare dell'apside potrà diminuire la velocità angolare di questo specialmente in vicinanza al primo verticale, e quindi in parte togliere quella grande differenza, che il calcolo ha stabilito tra la velocità angolare dell'apside al primo verticale e quella al Meridiano.

Di più il modo di sospensione del pendolo e la non omogeneità del filo, specialmente in vicinanza al punto stesso, la resistenza di esso filo, le correnti di aria, la differenza tra la velocità del punto di sospensione, e quella del piede della verticale potranno alterare notabilmente tanto il moto conico, quanto il moto angolare dell'apside, così che non dobbiamo sperare di vedere confermata pienamente in ciascuna esperienza la teoria, ma piuttosto dobbiamo ricercare la prova della sua verità nel complesso di moltissime esperienze a questo scopo instituite.

I risultati superiormente ottenuti mi sembrano confermati dalla maggior parte degli esperimenti dai fisici in proposito di questo fenomeno instituiti, non che da una serie di ventidue esperimenti da me fatti nella Basilica di San Petronio con un pendolo sospeso colle dovute avvertenze al volto della nave maggiore di detta chiesa.

Il pendolo era formato da una palla sferica di piombo del peso di Chilogrammi 12,312 diligentemente lavorata e sospesa per un filo di ottone del diametro di millimetri $0^{mm}, 7$ all' altezza di metri $42^{m}, 42$ circa.

L' andamento del pendolo ed il movimento dell' apside si osservavano con artifici adatti sopra circonferenze di circoli, aventi il centro comune nel piede della verticale del punto di sospensione, tracciati sopra una tavola orizzontale e con accuratezza divisi in gradi e minuti primi, sulle circonferenze dei quali era indicata la posizione del pendolo per mezzo di un indice acuminato appeso inferiormente alla palla nella direzione del filo.

Il complesso dei risultati delle mie esperienze, di cui non pochi intelligenti furono testimoni, mi ha condotto a queste conseguenze.

1.° Generalmente la velocità angolare dell' apside poco si scosta dalla velocità $h \operatorname{sen} \alpha$, cosicchè questo moto si accosta all' uniformità.

2.° La velocità angolare dell' apside al primo verticale supera generalmente la corrispondente al piano del Meridiano, essendosi trovato dalle esperienze che la velocità media dell' apside in vicinanza al primo verticale è di

$$0^{0}.\ 10'.\ 45'',$$

in vicinanza al Meridiano

$$0^{0}.\ 9'.\ 31''$$

per ogni minuto primo di tempo sidereo, mentre la velocità calcolata $h \operatorname{sen} \alpha$ si trova per la nostra latitudine ($44^{0}.\ 29'.\ 54''$)

$$0^{0}.\ 10'.\ 30'',\ 6.$$

3.° Il moto conico generalmente si effettua in senso opposto al moto dell' apside cioè dall' *Ovest*, pel *Sud* all' *Est*.

4.° Il moto conico è molto più sensibile al primo verticale, che al Meridiano.

Queste conseguenze, che complessivamente mi sembrano concordi col risultato teorico superiormente ottenuto, possono essere attestate da rispettabili Persone, che spesso assistettero agli esperimenti.

Avendo a mia disposizione un pendolo di non comune lunghezza volli approfittarne per determinare sperimentalmente il valore della gravità dal tempo impiegato nelle oscillazioni.

A questo scopo in due giorni distinti furono numerate le oscillazioni compiute in un determinato tempo. Nel primo giorno si ottenero N.° 644 oscillazioni in $4213'', 2$ di tempo siderale indicati da un cronometro Bertoud coll' apposita correzione per l' andamento cognito. In questa esperienza l' arco corrispondente alla prima oscillazione si trovò sotteso da una corda di lunghezza $1^{m},16$, e quello dell' ultima da una corda lunga $0^{m},428$. La temperatura media dell' esperimento si trovò di $5^{0},9$ ottantigradi; e la pressione atmosferica $0^{m},756$.

Nel secondo giorno si contarono 560 oscillazioni in $3664''$ di tempo siderale con una corda di $1^{m},78$ per l' arco della prima oscillazione, e di $0^{m},76$ per l' ultima, sotto la temperatura media di $7^{0},0$ ottantigradi, e la pressione atmosferica di $0^{m},754$.

Levato il pendolo per misurare la lunghezza del filo, si stese questo sopra un pavimento abbastanza regolare, fissandone una delle estremità ad un punto fisso, e ripiegandolo per l' altra estremità in piccola porzione sopra la scanellatura di una carrucola per sospendervi la palla unitamente ad un altro peso per procurare al filo la medesima tensione presso a poco, di cui era affetto durante gli esperimenti. Poscia con pertiche divise con un metro campione si è misurato acuratamente e ripetutamente il filo, che si è trovato della lunghezza di metri $42^{m},427$ mentre il termometro ottantigrado segnava $8^{0},2$. Quindi pesata la palla con una bilancia sensibilissima, impiegando tutti gli artifici suggeriti dalla Meccanica per ottenere il peso esatto indipendentemente dalle imperfezioni della bilancia, si è trovato il peso stesso di libbre bolognesi 36,310940 equivalenti a chilogrammi 12,311950. Così pure si è trovato il peso del filo libbre 0,821 equivalenti a chilogrammi 0,278376.

Pesando poscia la palla, non che il filo, nell' acqua, dal rapporto dei pesi superiormente trovato colle perdite di peso subite nel pesarli nell' acqua si trovò la gravità specifica della palla espressa da 11,676, quella del filo 5,052, prendendo per unità la gravità specifica dell' acqua. Misurando quindi il diametro della palla si trovò di $0^m,130$.

Ottenuti questi dati si è determinata la lunghezza del filo corretta della variazione dovuta alla differenza della temperatura, che dominava durante gli esperimenti e quella, che dominava quando si è misurato il filo, e per questa lunghezza si è determinata la lunghezza del pendolo semplice sincrono a questo pendolo composto, adoperando la formola generale del centro di oscillazione, e considerando il pendolo adoperato nelle esperienze composto di due masse distinte, quella cioè del filo e quella della palla.

Pel primo esperimento si trovò la lunghezza di questo pendolo espressa da

$$42^m,333131$$

pel secondo

$$42^m,334280.$$

Ridotte poscia le oscillazioni ad archi infinitesimi si trovò il numero delle oscillazioni pel primo esperimento ridotto a

$$644,0139.$$

Onde si ebbe pel primo esperimento la durata di ciascuna oscillazione

$$t = 6'',542095$$

e per l' altro

$$t = 6'',542281$$

di tempo siderale.

Elevando al quadrato ciascuna di queste quantità e dividendo i quadrati per le lunghezze rispettive del pendolo si trova

$$l = 0^m,989114,$$

$$l = 0^m,989037$$

lunghezza del pendolo che batte a Bologna i secondi di tempo siderale.

Per avere la lunghezza del pendolo che batte i secondi di tempo solare medio si moltiplichi ciascuno dei valori di l per 1,004483 e si avrà

$$l = 0^m,993548$$

$$l = 0^m,993472.$$

E prendendone il medio avremo

$$l = 0^m,993510.$$

Tale adunque sarà la lunghezza del pendolo semplice, che batte i secondi di tempo medio per Bologna.

Nella formola

$$l = a + b \text{ sen}^2 \alpha,$$

colla quale comunemente calcolasi il valore di l, sostituendo per α

$$44^0.29'.54''$$

latitudine geografica di Bologna, e mettendo in luogo di a, e b i valori numerici sperimentalmente determinati dal Biot si trova

$$l = 0^m,993538$$

valore che confrontato con quello superiormente ottenuto dà una differenza in +

$$0^m,000028$$

differenza che io vorrei piuttosto attribuire a geologica costituzione del nostro suolo, anzichè ad inesattezza di osservazione, quantunque però la sua picciolezza potesse benissimo renderla attribuibile agli errori, che sono inevitabili in esperienze di simil genere.

Dalla lunghezza del pendolo semplice, che batte i secondi di tempo medio, superiormente trovata, si deduce il valore della gravità per Bologna

$$g = 9^{m},805553.$$